

Mesures de Gibbs pour modèles d'Ising proche-voisins et à longues portées

Arnaud Le Ny

LAMA - UMR CNRS 8050 – UPEC – Université Paris Est

Journées de Statistique Mathématique et *Data Science*,
Hammamet – 1er novembre 2019 – 10h20-11h05

Mécanique statistique mathématique

Mécanique Statistique : Boltzmann 1876 – Gibbs 1902

- 1 Du microscopique au macroscopique (\implies Probabilités μ, ν etc.).
- 2 Systèmes interactifs (non-indépendance, au delà de 'Markov').
- 3 États d'équilibre selon la 2^{de} loi de la thermodynamique ($F = U - TS$).
- 4 **Transitions de phase** : différents comportements globaux.

Espaces produits $(\Omega, \mathcal{F}) = (E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$, $E = \{-1, +1\}$, $S = \mathbb{Z}^d$, $d = 1, 2, 3$

Mathématique : riches familles de mesures de probabilités ('DLR')

Probabilités conditionnelles à la Boltzmann-Gibbs ($\beta = T^{-1}$) :

$$(\text{'DLR'}) \quad \Lambda \Subset S, \mu[\sigma_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}] = \frac{1}{Z_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma | \omega)}, \mu - \mathbf{p.s.}(\omega)$$

Modèles d'Ising classique et à longue portée

Interactions de paires : couplages ferromagnéti. $J(i, j) = J(|i - j|) \geq 0$

$$\left(\forall i \in \mathbb{Z}^d, \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |J(i, j)| < \infty \right), \quad H(\omega) = - \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^d} J(i, j) \omega_i \omega_j$$

- ❶ **Proche-voisins homogène** ($d = 1, 2, 3$) : $J \geq 0, i, j \in \mathbb{Z}^d$

$$J^{n.n.}(i, j) := J \cdot \mathbf{1}_{|i-j|=1}$$

- ❷ **Isotropique à longue portée** ($d = 1, 2, \alpha > d$) : $J \geq 0, i, j \in \mathbb{Z}^d$,

$$J^1(i, j) := J \cdot |i - j|^{-\alpha}$$

- ❸ **Anisotropique à (très) longue portée** ($d = 2, \alpha_1, \alpha_2 > 1$) : $J \geq 0$

$$J^2(i, j) := J \cdot |i_2 - j_2|^{-\alpha_2} \cdot \mathbf{1}_{|i_1 - j_1|=0} + J \cdot |i_1 - j_1|^{-\alpha_1} \cdot \mathbf{1}_{|i_2 - j_2|=0}$$

Programme de l'exposé

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Transition et coexistence de phases pour modèles d'Ising
- 3 États de Dobrushin pour modèles d'Ising à longue portée

Mesures DLR – Mesures de Gibbs

Hamiltonien à condition aux bords $\omega \in \Omega$, à volume fini $\Lambda \in \mathbb{Z}^d$:

$$H_\Lambda(\sigma|\omega) := H_\Lambda(\sigma_\Lambda \omega_{\Lambda^c}) = - \sum_{i,j \in \Lambda} J(i,j) \sigma_i \sigma_j + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c} J(i,j) \sigma_i \omega_j$$

Spécifications de Gibbs sur $(E^S, \mathcal{E}^{\otimes S})$: $\gamma_\Lambda^\beta(\sigma|\omega) := \frac{1}{Z_\Lambda^\omega} e^{-\beta H_\Lambda(\sigma|\omega)}$, $\beta > 0$

Équations DLR : $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\beta) \iff \mu \gamma_\Lambda^\beta = \mu, \forall \Lambda \in S$

ou à la Markov : $\mu[\sigma_\Lambda | \mathcal{F}_{\Lambda^c}](\omega) = \gamma_\Lambda^\beta(\sigma|\omega)$, μ -p.s. (ω)

Décomposition extrême – Ensemble convexe $\mathcal{G}(\gamma^\beta) \neq \emptyset$

$$\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\beta) \iff \mu(\cdot) = \int_{\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)} \alpha_\nu(\mu) d\nu$$

Warning : Il peut y avoir (beaucoup) de mesures de Gibbs extrémales et non-invariantes par translation!!!

Propriétés des états extrémaux – *Phases.*

États extrémaux : états macroscopiques avec trivialité asymptotique

$$\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \iff \mu \text{ triviale sur } \mathcal{F}_\infty := \bigcap_{\Lambda \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_\Lambda^c$$

Différents ensembles pertinents de mesures de probabilités :

- 1 Ensemble \mathcal{W} des limites faibles $(\gamma_\Lambda(\cdot | \mathbf{a}))_\Lambda$
- 2 Ensemble $\mathcal{G}(\gamma)$ des mesures de Gibbs
- 3 Ensemble $\mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma)$ des mesures de Gibbs *invariantes par translation*
- 4 $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma)$: mesures de Gibbs extrémales (*phases*)
- 5 $\text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \cap \mathcal{M}_{\text{inv}}$: états extrémaux *et* invariants par translation
- 6 $\text{ex}\mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma)$ peut être plus grand que (5) (*états ergodiques* – cf modèle d'Ising Anti-Ferromagnétique)

On focalisera principalement sur les états extrémaux (4) et (5)

Premières mesures de Gibbs : limites faibles μ^- , μ^+

EXISTENCE DE LIMITES FAIBLES ET ORDRE STOCHASTIQUE

... - FERNANDEZ-PFISTER 1997 - ...

Ordre stochastique " \leq " : $\mu \leq \nu$ ssi f croissante $\implies \int f d\mu \leq \int f d\nu$

- 1 Limites monotones bien-définies $\mu_\beta^-, \mu_\beta^+ \in \mathcal{G}(\gamma^\beta)$:

$$\mu_\beta^-(\cdot) := \lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | -), \quad \mu_\beta^+(\cdot) := \lim_{\Lambda \uparrow S} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | +)$$

- 2 Toute autre mesure de Gibbs $\mu \in \mathcal{G}(\gamma^\beta)$ satisfait :

$$\mu_\beta^- \leq \mu \leq \mu_\beta^+$$

- 3 Les mesures extrémales sont atteignables par des c.b. *typiques* :

Si $\mu \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma^\beta)$, alors $\lim_{\Lambda} \gamma_\Lambda^\beta(\cdot | \omega) = \mu(\cdot)$ μ -p.s. (ω)

Programme de l'exposé

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Transition et coexistence de phases pour modèles d'Ising
- 3 États de Dobrushin pour modèles d'Ising à longue portée

Cas classiques : Ising proches voisins $d = 1, 2, 3$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 1$: $\mathcal{G}(\gamma^\beta) = \{\mu\}$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 2$: $\exists \beta_c(2) > 0$ tel que

$$\mathcal{G}(\gamma^\beta) = \{\mu\} \text{ pour } \beta \leq \beta_c \text{ et } \mathcal{G}(\gamma^\beta) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+] \text{ pour } \beta > \beta_c$$

Toute autre mesure de Gibbs s'écrit $\mu = \alpha\mu^- + (1 - \alpha)\mu^+ \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^\beta)$

Modèle d'Ising proche-voisins $d = 3$: $\mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^\beta) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+], \beta > \beta_c$

États de Dobrushin à basse T (pour $\beta > \beta_c(2)$) :

$$\mu^\pm(\cdot) := \lim_{\Lambda} \gamma_\Lambda(\cdot | \pm) \in \text{ex}\mathcal{G}(\gamma) \setminus \mathcal{M}_{\text{inv}}(\Omega), \mu^\pm \neq \frac{1}{2}\mu^- + \frac{1}{2}\mu^+$$

\pm : conditions de Dobrushin, mixte ± 1 (+ en haut, - en bas)

États de Dobrushin en dimension 3

Dobrushin 1972 – van Beijeren 1975 – Bricmont-Lebowitz-Pfister 1979–81

$d = 3$: interfaces *rigides* (à fluctuations bornées)

(Clé : *roughening*, transition de phase en dimension inférieure et couplage de Percus))

État extrémal non-translation-invariant (ni ses translatés) : $\mu^\pm \neq \frac{1}{2}\mu^+ + \frac{1}{2}\mu^-$

(*Localement* : coexistence μ^+ / μ^- près de l'interface central, μ^+ vers le haut, μ^- vers en bas).

⇒ Nb dénombrable d'états extrémaux non-t.-i. = **États de Dobrushin**

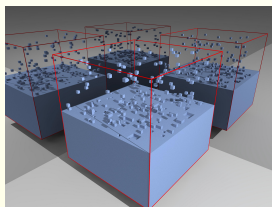


FIGURE – États de Dobrushin ($d = 3$)

Importance des états non-invariants par translation

Non-ergodicité ; contre-exemples dans la formalisme DLR (Goldstein 1980, Coquille 2015)

Markov *locale* (resp. *globale*) : $\mu[\sigma_\Lambda | \mathcal{F}_{\Lambda^c}] \in \mathcal{F}_{\partial(r)\Lambda}, \forall \Lambda \in \mathcal{S}$ (resp. $\Lambda \subset \mathcal{S}$)

Ex 1. Un champ de Markov sans la propriété globale pour $d = 3$

Reflexion $T : (i_1, i_2, i_3) \longrightarrow (i_1, i_2, -i_3)$, identité sur $\{i_3 = 0\}$

$$\mu := \frac{1}{2}\mu^\pm + \frac{1}{2}T\mu^\pm$$

ne satisfait pas Markov globale (fausse pour $\Lambda = F \in \mathcal{F}_{i_3 > 0}$).

Ex 2. Une mesure de Gibbs sans limite faible (Coquille 2015), $d = 3$

$$\mu := \frac{1}{2}\mu^\pm + \frac{1}{2}\mu^\mp \in \mathcal{G}(\gamma^\beta)$$

n'est limite faible d'aucune mesure à cond. aux bords déterministe.

Cas planaire ($d = 2$) : fluctuation d'un interface

Minlos-Sinai 67– Gallavotti 72 – Abraham/Reed 76 – Lebowitz 77 – Messager-Miracle-Solé 75/77 – Aizenman 80 – Higuchi 79/81

À (très) basses températures, l'interface 'naturel' fluctue

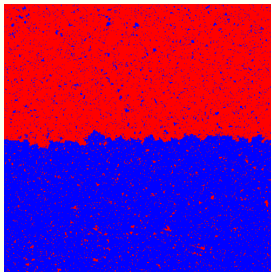


FIGURE – Crédits photos V. Beffara

NB : Principe d'invariance avec pont brownien (Greenberg-Ioffe 2005)

Représentation en *Contours* (Peierls 1936 – Griffiths 1964 – Dobrushin 1965)

Idée : État fondamental (tout +) perturbé par des défauts γ_k (entropie)

Argument de Peierls : représentation en contours $\sigma_\Lambda \longleftrightarrow (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$H_\Lambda^+(\sigma_\Lambda) = \sum_{\langle ij \rangle \in \Lambda} \left((1 - \sigma_i \sigma_j) + 1 \right) = 2 \sum_k |\gamma_k| + h(\Lambda) = 2|\underline{\gamma}| + H_\Lambda^+(\mathbf{+}_\Lambda)$$

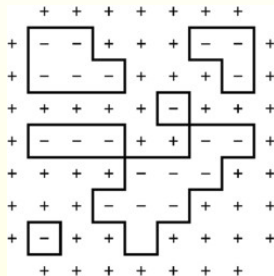


FIGURE – Contours $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ (conditions aux bords +)

Argument de Peierls : transition de phase à basse T.

Transition de phase *via* $\mu_{\Lambda}^{+}(\sigma_0 = -) \leq \epsilon(\beta) \rightarrow 0$ si $\beta \rightarrow \infty$

$\{\sigma_0 = -\} \implies \exists$ au moins un contour γ_0 contenant l'origine 0 :

$$\mu_{\Lambda}^{+}(\{\sigma_0 = -\}) \leq \frac{\sum_{\underline{\gamma}} \mathbf{1}_{\{\exists \gamma_0 \in \underline{\gamma} : \text{Int}(\gamma_0) \ni 0\}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma})}}{\sum_{\underline{\gamma}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma})}}$$

Au numérateur, $\underline{\gamma} = (\gamma_0, \underline{\gamma}^0)$, avec $H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma}) = H_{\Lambda}^{+}(\gamma_0) + H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma}^0)$

$$\mu_{\Lambda}^{+}(\{\sigma_0 = -\}) \leq \sum_{\gamma_0} \mathbf{1}_{\{\text{Int}(\gamma_0) \ni 0\}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\gamma_0)} \frac{\sum_{\underline{\gamma}=(\gamma_0, \underline{\gamma}^0)} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma}^0)}}{\sum_{\underline{\gamma}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\underline{\gamma})}}$$

Bornes énergétiques et entropiques

Par (quasi-)additivité de l'hamiltonien,

$$\mu_{\Lambda}^{+}(\{\sigma_0 = -\}) \leq \sum_{\gamma_0} \mathbf{1}_{\{\text{Int}(\gamma_0) \ni 0\}} e^{-\beta H_{\Lambda}^{+}(\gamma_0)}$$

Borne énergétique (coût d'un contour γ) : $\gamma_{\Lambda}^{\beta}(\gamma|+) \leq e^{-2\beta|\gamma|}$

Borne entropique : nombre de contours de longueur l

$$N_0(l) := \sum_{\gamma} \mathbf{1}_{|\gamma|=l} \mathbf{1}_{\{0 \in \text{Int}(\gamma)\}} \leq l 3^l$$

Estimée de Peierls : $\implies \mu_{\beta}^{-} \neq \mu_{\beta}^{+}$ à basse T.

$$\mu_{\Lambda}^{+}(\{\sigma_0 = -\}) \leq \sum_{l \geq 4} N_0(l) e^{-2\beta l} \leq \sum_{l \geq 4} l 3^l e^{-2\beta l} < \frac{1}{2}, \text{ pour } \beta \gg \beta_c$$

Coexistence des phases en $2d$ – Ligne de Gallavotti

Conditions aux bords de Dobrushin $\mu^\pm(\cdot) := \lim_{\Lambda} \gamma_{\Lambda}^{\beta}(\cdot|\pm) \in \mathcal{G}_{\text{inv}}(\gamma^{\beta})$?

Décomposition en contours $\underline{\gamma} =$ une ligne λ et des circuits $\gamma_1, \dots, \gamma_n$

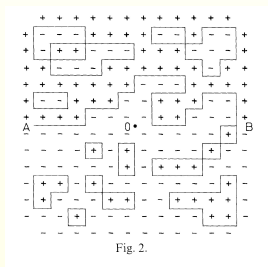


FIGURE – Ligne de Gallavotti $\lambda = (AB)$

Fluctuations de l'interface en dimension 2

- 1 (Gallavotti 1972) Pour β assez grand, il existe $D(L) \approx \sqrt{L}$ tel que

$$\lim_L \mu_L^\pm [d(\lambda, Q) > D(L)] = 1, \quad \forall Q \in \mathbb{Z}^2, \quad \text{et } \mu^\pm = \frac{1}{2}\mu^- + \frac{1}{2}\mu^+ \quad (\text{t.i.})$$

- 2 (Abraham/Reed 1976)

$$\mu^{\pm, \alpha} := \lim_{\Lambda} \gamma_{\Lambda}^{\beta}(\cdot | \pm^{(\alpha)}) = \alpha\mu^+ + (1 - \alpha)\mu^- \quad (\text{t.i.})$$

$$\lim_L \langle \sigma_{(0, \alpha\sqrt{L})} \rangle_L^{\pm} = m^*(\beta)\Phi(b|\alpha|) \quad \text{et} \quad \langle \sigma_{(0, p)} \rangle_L^{\pm} \rightarrow 0 \quad \text{pour } p = o(\sqrt{L})$$

- 3 (Messenger-Miracle-Solé 1977) T.i pour c.b. $b(\pm)$ plus générales

$$\lim_L \langle \sigma_{\Lambda} \rangle_L^{b(\pm)} = \langle \sigma_{\Lambda} \rangle^{b(\pm)} = \lambda \langle \sigma_{\Lambda} \rangle^+ + (1 - \lambda) \langle \sigma_{\Lambda} \rangle^-, \quad \text{for } 0 \leq \lambda \leq 1$$

Dimension 2 : théorème d'Aizenman-Higuchi

Russo 79 – Aizenman 80 – Higuchi 81 – Dobrushin-Hryniv 97 – Greenberg-Ioffe 05 – Coquille-Velenik 13

Théorème d'AH : Absence d'états non-invariants par translation (d=2)

$$\mathcal{G}(\beta) = [\mu_\beta^-, \mu_\beta^+], \quad \mu = \alpha_\mu \mu^+ + (1 - \alpha_\mu) \mu^-, \quad \forall \beta \geq \beta_c (\forall \beta)$$

Descriptions plus détaillée : Principe d'invariance avec un pont brownien (Higuchi 81, Greenberg Ioffe 05).



FIGURE — Fluctuation de l'interface en $2d$

Programme de l'exposé

- 1 Approche DLR : transitions de phases et états d'équilibre
- 2 Transition et coexistence de phases pour modèles d'Ising
- 3 États de Dobrushin pour modèles d'Ising à longue portée

Transitions de phase en dimension 1 : 'Dyson'

Modèles de Dyson : $1d$ -Ising à décroissance polynomiale ($\alpha > 1$)

- **Unicité pour $\alpha > 2$** (Ruelle 1968, Dobrushin 1968, BLP 1979).
- **Transition de phase pour $1 < \alpha < 2$ (conjecture de Kac-Thompson).**
Dyson 1969, Fannes *et al.* 1974 : $\mathcal{G}(\gamma) = [\mu^-, \mu^+]$ (basse T)
- Cas critique $\alpha = 2$:
Dyson 1971, Fröhlich-Spencer 1982 (*Effet Thouless* ACCN 1988)
- Cassandro *et al.* 2005 – 2017 : Contours pour $1 < \alpha < \alpha_+ < 2$
(transition de phase à basse T).
- **Interface et coexistence de phases** pour $1 < \alpha < \alpha_+ < 2$
CMPR 2014-2017 (fluctuations gaussiennes).
- Littin-Picco 2017, Picco *et al.* 2017, Bissacot *et al.* 2018, ...

Modèles d'Ising à longue portée en dimension 2

Hamiltonien formel

$$H(\omega) = - \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^d} \frac{J}{\|i-j\|^\alpha} \omega_i \omega_j, \quad \alpha > d = 2$$

Transition de phase à basse température ($d = 2, \alpha > 2$)

- Cas ferromagnétiques : inégalités de corrélations (Griffiths 1964) impliquent transition de phases pour $\alpha > 2$ à basses T.
- D'autres méthodes ('*Reflection-Positivity*') pour $\alpha \in (2, 4)$.
- $\alpha > 3$: Transition de phase via énergie libre par Ginibre *et al.* (1966).
- $\alpha > 3$: **Gertzik-Pirogov-Sinai** (GPS) description de modèles symétriques satisfaisant une estimée de type Peierls.

Absence d'états de Dobrushin en dimension 2

États de Dobrushin : $(\pm, h) \in \Omega$ c.b. de Dobrushin à hauteur $h \in \mathbb{Z}$

$$\mu^{(\pm, h)} := \lim_{\Lambda} \gamma_{\Lambda}(\cdot | (\pm, h)) \text{ lorsqu'elle est extrémale ET non - t.i.}$$

Cas du modèle *isotropique* :

Couplages ferromagnétiques à décroissance polynomiale de degré $\alpha > 2$

Théorème (Coquille-van Enter - LN - Ruszel 2018)

Pour le modèle isotropique à longue portée en dimension 2, quelle que soit la température et le degré $\alpha > 2$, **il ne peut pas exister d'états de Dobrushin.**

Clé pour $\alpha > 3$: borne énergétique dans la boîte $\Lambda = \Lambda_L$

$$|H_{\Lambda}^{\pm, 0}(\sigma) - H_{\Lambda}^{\pm, 1}(\sigma)| \leq O(L^{3-\alpha}), \forall \sigma \in \Omega$$

Cas général : borne énergétique pour $\alpha > 3$

Clé : Comparer c.b. de Dobrushin centrée $(\pm, 0)$ et (\pm, h)

Borne énergétique dans la boîte $\Lambda = \Lambda_L = ([-L, +L] \cap \mathbb{Z})^2$:

$$|H_{\Lambda}^{\pm,0}(\sigma) - H_{\Lambda}^{\pm,1}(\sigma)| \leq O(L^{3-\alpha}), \quad \forall \sigma \in \Omega \quad (1)$$

qui est uniformément borné pour $\alpha > 3$.

Techniques de preuves : Dessins et triple intégration du couplage $|J(k)| \approx k^{-\alpha}$ (sans hypothèse ferromagnétique)

Conséquences directes :

- 1 Absence d'états de Dobrushin pour $\alpha > 3$.** L'estimée (1) implique l'absolue continuité $\mu^{\pm,1} \ll \mu^{\pm,0}$
 \implies Les mesures $\mu^{\pm,h}$ doivent avoir les mêmes éléments de la décomposition extrémale. Si l'une était extrême, elles devraient alors être identiques, et donc invariantes par translation : **Il ne peut donc y avoir d'états de Dobrushin.**
- 2** Finalement, à basse température, on retrouve grâce à Dobrushin-Shlosman (1985) couplé à Gertzik (1976) que pour $\alpha > 3$:

$$\mu^{\pm,0} = \frac{1}{2}\mu^{-} + \frac{1}{2}\mu^{+}.$$

Perspectives : fluctuations gaussiennes de la ligne λ , à étudier.

Cas ferromagnétique : borne 'entropique' pour $\alpha > 2$

Comparer les hamiltoniens pour la configuration de Dobrushin ($\sigma_{GS} = \pm$) et une configuration modifiée d'un pas vertical ($\sigma_{GS,step}$)

Estimée énergétique pour $2 < \alpha \leq 3$ (cas **ferromagnétique**)

$$|H_{strip(L)}(\sigma_{GS}) - H_{strip(L)}(\sigma_{GS,step})| \leq O(L^{2-\alpha})$$

Estimée d'entropie relative : intégration sous μ^{\pm} dans $\Lambda = \Lambda_L$:

$$\langle |H_{\Lambda}^{\pm,0}(\sigma) - H_{\Lambda}^{\pm,1}(\sigma)| \rangle_L^{\pm,0} \leq O(L^{2-\alpha})$$

Conséquences :

- 1 Absence d'états de Dobrushin pour $2 < \alpha \leq 3$. Entropie relative finie \implies absolue continuité \implies invariance par translation dans le cas où l'une des mesures est extrême. Il ne peut là non plus y avoir d'états de Dobrushin.
- 2 Y'a-t-il d'autres états extrémaux possibles via d'autres conditions aux bords (ou ?) qui soient non-invariants par translation ?

Questions ouvertes : fluctuations de l'interface (non-gaussiennes ? Limite d'échelle ? Tension de surface ?)

Conclusions – Perspectives

Russo 78 – Aizenman 80 – Higuchi 81 – Gandolfi-Keane-Russo 88

Bricmont-Lebowitz-Pfister-Olivieri 79 – Lebowitz-Pfister 81 – Bricmont-Fontaine-Lebowitz 82 – Miracle-Solé 94

- 1 Interfaces rigides en dimension 2 pour modèles anisotropiques à très longues portées (Coquille *et al.* 2018, Percus-van Beijeren 'coupling').
- 2 Fluctuations de l'interface et théorèmes limites (Pont browniens ou de Lévy) ($\alpha > 3$ en cours, $2 < \alpha \leq 3$ ouvert, cas anisotropiques).
- 3 Description microscopique : tension de surface, *step free energy*, etc.
- 4 Description complète à la Aizenman-Higuchi ? On a

$$\mu^\pm = \frac{1}{2}\mu^- + \frac{1}{2}\mu^+$$

et aussi $\mathcal{G}_{\text{inv}}(\beta) = [\mu^-, \mu^+]$ (Raoufi 2017) mais un résultat complet manque*.

*Besoin :

Exclure des états extrémaux invariants qui ne soient pas obtenus par toutes les conditions aux bords que l'on puisse imaginer.....